特別研究報告書

複数ユニット割当問題における
虚偽申告の防止

指導教員　　松原 繁夫 准教授

京都大学工学部情報学科

水島 拓也

平成 25 年 2 月 1 日

複数ユニット割当問題における虚偽申告の防止

水島 拓也

内容梗概

割当問題とは組合せ最適化問題の一種であり，ある集合の要素を別の集合の要素に割り当てる際に，どのように割り当てれば制約条件を満たしながら最善の割当ができるのかを決定する問題である．費用が最小となるように人員をタスクに割り当てるタスク割当問題や，個人の希望を最大限満たしつつ学生をクラスに割り当てるクラス編成問題など，様々な応用が存在する．

これまでに割当問題に関する様々な研究が存在するが，参加者の選好が既知であると仮定したものが多い．しかし，本来選好は参加者の私的情報であり，割当決定者は参加者から選好を獲得する必要がある．ここに，耐戦略性を持つメカニズムを設計するという課題が現われる．参加者個々は利己的であり，虚偽申告によってより望ましい割当てが得られるならば，選好に関して虚偽申告をするであろう．もし虚偽申告が行われれば，その上で割当てを決定しても，非効率な割当てしか実現できなくなる．よって，誘因両立性を満たす，すなわち，真実申告が均衡戦略となるメカニズムの設計が必要である．

本研究では，割当問題の中でも複数ユニット割当問題を対象とする．例えば，合同就職説明会の場面を考えよう．一日の内で各学生は複数の企業ブースを見学できる．一方，各企業ブースには定員があり，全学生のすべての希望を満たせる状況にはないと想定する．このとき，制約を満たすように各学生を各企業ブースに割り当てることがここでの問題である．さて，金銭取引を可能と仮定すれば，組合せオークションと考えて，Vickrey-Clarke-Groves メカニズムを用いることで，真実申告が均衡戦略となる．しかし，金銭取引の導入が適さない応用も多い．金銭取引が可能でない場合，誘因両立性を満たすメカニズムは独裁的となることが知られており，割当てが単一ユニットから複数ユニットになれば，割当効率性が大きく低下することになる．そこで，本研究では，金銭取引のない複数ユニット割当問題に対して，以下の課題を検討する．

虚偽申告の影響評価

複数ユニット割当問題において，虚偽申告が有効であるかどうか，有効な場合，どのような虚偽申告のパターンが存在するかを明確にすることが必要である．

虚偽申告を防ぐメカニズムの設計

　複数ユニット割当問題に対して虚偽申告が存在する場合，その虚偽申告を防止するメカニズムを設計することが必要である．

本研究では上記の課題に対して，選好分布が得られている場合を仮定して議論を進める．合同就職説明会運営者は，個々の学生の選好を直接観測することはできないが，どの企業ブースが人気があるかといった選好分布を知っているという仮定である．特に，1社の人気企業が存在し，それ以外の企業については希望が均等に分散する場合を仮定し議論を進める．まず，真の選好を仮定し，虚偽申告の全通りを尽くして調べることで，有効な虚偽申告パターンを明らかにする．つぎに，虚偽申告を防止するメカニズムを設計するが，基本となる考え方は以下のとおりである．金銭取引を認めれば真実申告が均衡戦略となるが，これは他者に勝つぎりぎりの価格を支払わせることで実現される．つまり，希少な資源は価格が上がり，潤沢な資源は価格が下がる．しかし，金銭取引を認めなければ，このような調整が行えない．そこで，希少資源である人気企業の割当てを受けた学生には，それ以外の割当てを確率的にスキップさせる．つまり，価格調整の代わりに割当調整を用いて，真実申告を均衡戦略とするという考え方である．

本研究の貢献は以下の通りである．

有効となる虚偽申告パターンの解明

　人気企業以外を第1希望とする学生は，人気企業を第1希望と虚偽申告することで期待効用を増加させ得ることを明らかにした．これは，人気企業ブースは希少な資源であり，効率的な割当てが目的とされる場合，第1希望者に優先的に割り当てられるため，虚偽申告が有効となる．

虚偽申告を防止するメカニズムの提案

　上記の虚偽申告を防ぐために，人気企業の割当てを受けた場合に，それ以外の割当てを確率的にスキップするメカニズムを提案した．スキップ確率を大きくすれば，人気企業以外を第1希望とする学生の虚偽申告を防げるが，逆に人気企業を第1希望とする学生の虚偽申告を引き起こす恐れがある．そこで，全学生にとって虚偽申告を防ぐスキップ確率の範囲を求めた．つぎに，評価実験を行い，個々への割当て数が少なくなる状況において，提案方法が単純な方法と比較してより有効となることを確認した．

Preventing False Declarations in Multi-Unit Assignment Problems

Takuya Mizusima

Abstract

Assignment problem is a kind of optimization problems, and it is the problem to decide the best assignment when we assign certain factors to different factors meeting conditions. There are various application example.

Various studies about assignment problem exist, but many of them suppose that preference of the participant is known. However, the preference is originally personal information of the participants. so, it is necessary for the assignment decider to acquire the preference from the participants. Here, a problem to design the assignment mechanism with strategy-proof occurs. If the participant individual is selfish, and a more desirable assignment is provided by a false declaration, they will declare their preference falsely. If false declarations is carried out, we can realize only the assignment which is non-efficiency. So, it is necessary to design the assignment mechanism that true declaration becomes the equilibrium strategy.

In this study, I intend for the multi-unit assignment problem. As an example, I think about the case of career fair. Each student can visit the plural company booths in a day. On the other hand, each company booth has capacity and assumes it if there is not it in the situation to be able to satisfy all hope of all students. It is a problem here to assign each student to each company booth to meet conditions. By the way, the mechanism that true declaration becomes the equilibrium strategy exists if I deal with single unit assignment problem that each student visit only one company booth. In addition, if pecuniary transaction is possible, using Vickrey-Clarke-Groves mechanism as the combination auction, true declaration becomes the equilibrium strategy. However, the introduction of the limit to a visit to only one company and the pecuniary transaction is not suitable for the assignment problem in career fair. For the multi-unit assignment problem without pecuniary transaction, I examine the following problems in this study.

- **Estimation of the effect of false declaration**

In multi-unit assignment problem, it is necessary to make it clear whether false declaration is effective or not, and the pattern of what kind of falsehood report exists when it is effective.

- **Design of the mechanism to prevent a false declaration**
  When a false declaration exists for the multi-unit assignment problem, it is necessary to design the mechanism to prevent the false declaration.

In this study, I push forward argument for the problem mentioned above , supposing the case that preference distribution is provided. Particularly, I suppose that only one popular company exists and the preference for other than popular company is distributed equally. At first I clarify an effective pattern of false declaration. Then, I design the mechanism to prevent a false declaration. The basic ways of thinking are as follows. We can adjust the value of resources when pecuniary transaction is possible, but we cannot use pecuniary transaction in career fair. Therefore I let the student who received the assignment of the popular company which is rare resources skip following assignments at random. In other words it is a thought to assume a true declaration the equilibrium strategy using assignment adjustment in substitution for price adjustment. The contribution of this study is as follows.

- **Elucidation of a falsehood declaration pattern becoming effective**
  I made it clear that students whose first hope is other than popular company can increase an expectation utility by declaring that popular company is their first hope falsely.
- **Suggestion of the mechanism to prevent a false declaration**
  In order to prevent the false declaration mentioned above, I suggested mechanism that I let the student who received the assignment of the popular company skip following assignments at random. If I increase skip probability, I can prevent the false declaration of student whose first hope is other than popular company. On the contrary, however, it might cause the false declaration of the student whose first hope is popular company. Therefore I found a range of the skip probability to prevent a false declaration for all students. Then, I evaluated it and confirmed how much it could improve an assignment in comparison with the case that a false declaration occurred.

複数ユニット割当問題における虚偽申告の防止

目次

第 1 章 はじめに **1**

第 2 章 関連研究 **3**

2.1 クラス編成問題 3

2.2 問題点 4

第 3 章 割当メカニズム **5**

3.1 問題設定と割当の方針 5

3.2 虚偽申告の防止 8

3.3 提案手法の定式化 10

3.3.1 $\alpha n < k$ の場合 11

3.3.2 $\alpha n > k$ の場合 16

3.3.3 $\alpha n = k$ の場合 19

第 4 章 評価 **21**

4.1 評価方法 21

4.2 評価結果 22

第 5 章 おわりに **24**

謝辞 **25**

参考文献 **25**

第1章　はじめに

割当問題とは組合せ最適化問題の一種であり，ある集合の要素を別の集合の要素に割り当てる際に，どのように割り当てれば制約条件を満たしながら最善の割当ができるのかを決定する問題である．費用が最小となるように人員をタスクに割り当てるタスク割当問題や，個人の希望を最大限満たしつつ学生をクラスに割り当てるクラス編成問題など，様々な応用が存在する．

割当問題に関する様々な研究が存在するが，参加者の選好が既知であると仮定したものも多い [1, 2]．しかし，本来選好は参加者の私的情報であり，割当決定者は参加者から選好を獲得する必要がある．ここに，耐戦略性を持つメカニズムを設計するという課題が現われる．参加者個々は利己的であり，虚偽申告によってより望ましい割当てが得られるならば，虚偽申告をするであろう．もし虚偽申告が行われれば，その上で割当てを決定しても，非効率な割当てしか実現できなくなる．（図 1，図 2 参照）よって，真実申告が均衡戦略となるメカニズムを設計することが必要である．

本研究では，割当問題の中でも複数ユニット割当問題を対象とする．例として，合同就職説明会の場面を考える．合同企業説明会とは，多数の企業が一つの会場に集まり，学生向けに各社が自社ブースにおいて企業説明会を行うイベントである．来場した学生は，自分が説明を聞きたい企業ブースを自分のスケジュールに合わせて回る．大規模なものになると参加企業は 100 社を超え，1 日に来場する学生は数万人にも上る．一日で様々な企業に触れられるため，企業研究には有用である．一方で，各企業ブースには定員があり，全学生のすべての希望を満たせる状況にはない．このとき，制約を満たすように各学生を各企業ブースに割り当てることがここでの問題である．

さて，金銭取引を可能と仮定すれば，組合せオークションと考えて，Vickrey-Clarke-Groves メカニズムを用いることで，真実申告が均衡戦略となる．しかし，合同企業説明会では，金銭取引の導入は適さない．金銭取引が可能でない場合，誘因両立性を満たすメカニズムは独裁的となることが知られている．これは，各学生の順序をランダムに決めて，順に見学したい企業を任意の数申告させる方法である．この方法は効率的な割当て実現が困難であり，割当てが単一ユニットから複数ユニットになれば，割当効率性が大きく低下することになる．

本研究では，合同企業説明会のように割当先が複数ある場において，虚偽申

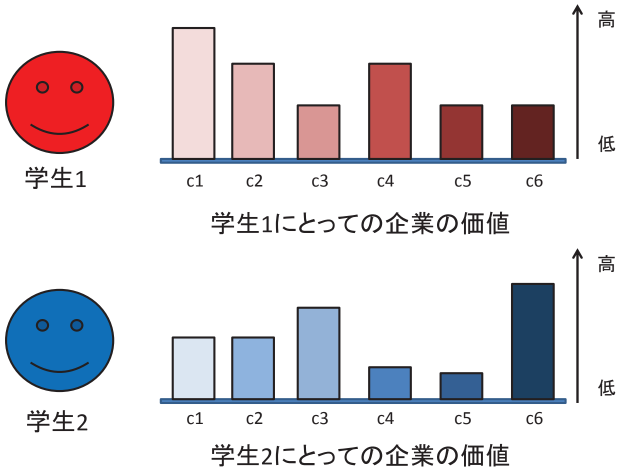

図 1: 学生の志望

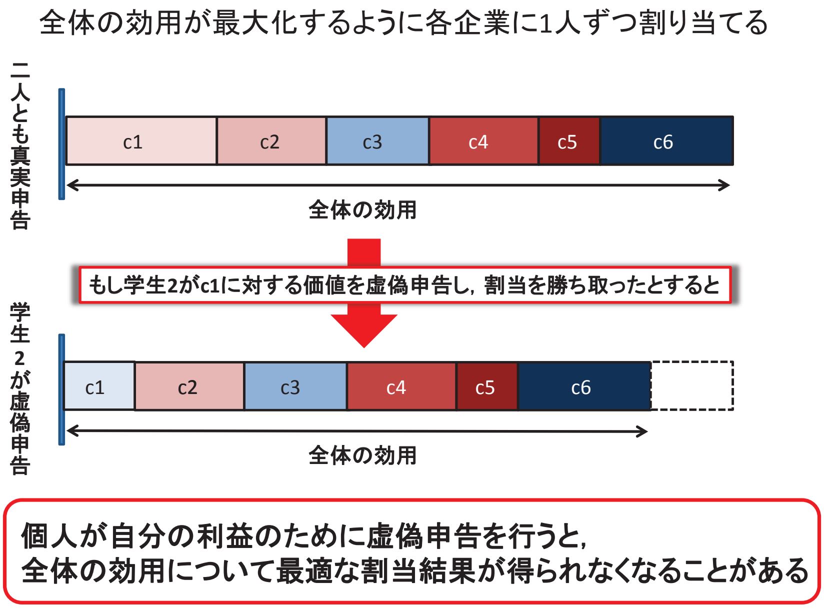

図 2: 虚偽申告の単純な例

告を行わせないような割当手法を提案することを目的とする．本稿の構成は以下の通りである．まず第 2 章において割当問題の関連研究を紹介する．次に第 3 章で虚偽申告を防止するための割当手法を提案し，第 4 章においてその評価を行う．最後に第 5 章をまとめとして本稿を締めくくる．

第2章　関連研究

定員のある枠に対して学生を割り当てて行く作業について，今野浩のクラス編成問題に関する研究がある [3, 4]．本章ではこの先行研究に関する説明を行い，本研究との差異を明らかにする．

2.1　クラス編成問題

学生は第3志望までのクラスを志望表に記入する．この志望表をもとにしてクラス編成を行う．ここで，クラス分けにはいくつか満たすべき条件がある．特に重要なものをあげると

1. 各学生の希望は最大限尊重する．すなわち，各学生をなるべく上位の志望クラスに所属させる．
2. 各教官によって設定されたクラス定員の枠を守る

という二つである．このような条件を満たしつつ学生をクラスに割り当てるため，以下のような数理モデルを用いる．

- モデル

  学生の総数を n，クラスの総数を m，クラス番号を $i(i = 1, 2, \ldots, m)$，学籍番号を $j(j = 1, 2, \ldots, n)$，第 i クラスの定員を a_i とおく．また，学生 j をクラス i に所属させるか否かを表す $m \times n$ 個の変数 x_{ij} を用意する．これは以下のように定義される．

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{学生 } j \text{ をクラス } i \text{ に所属させるとき} \\ 0 & \text{学生 } j \text{ をクラス } i \text{ に所属させないとき} \end{cases} \tag{1}$$

この変数を用いることで,「学生 j がどれか一つのクラスに所属する」は

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = 1 \tag{2}$$

と表すことができ,「第 i クラスが定員オーバーとならない」は

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} \leq a_i \tag{3}$$

と表す事が出来る．また，クラスに対する学生の志望度を表す変数として q_{ij} を導入する．割当結果からこの変数の値に応じて点数が得られる事になる．第1志望クラス i_1，第2志望クラス i_2，第3志望クラス i_3 について，q_{ij}

は以下のような値をとる．

$$q_{ij} = \begin{cases} 100 & (i = i_1) \\ X & (i = i_2) \\ Y & (i = i_3) \end{cases} \tag{4}$$

ここで，X と Y は 0 以上 100 以下の整数であり，学生 j が自由に設定できる．つまり，学生 j はクラス i_1 に割り当てられたら 100 点，クラス i_2，i_3 なら 0 以上 100 以下の点数が得られる．この方法ならば，例えば二つのクラスで迷っている学生は 100:100:0 と配点を行うことができる．第 1 志望のみを強く希望する学生は 100:0:0 と配点すればよいし，どのクラスでもよい学生は 100:100:100 と書くことで自分の志望を表現できる．この配点法は 300 点を持つ学生と 100 点しかもたない学生が混在するため一見不公平のように思えるが，どの学生も一つのクラスにしか割り当てられないため，結果的には全員が最大 100 点しか得られないことになり，公平である．

以上のような変数を用いて，クラス編成問題は以下のように定式化できる．

$$\begin{aligned} &Maximize && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} \\ &Subject\ to && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, ..., n) \\ & && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, ..., m) \\ & && x_{ij} = 0 or 1 \quad (i = 1, ..., m; j = 1, ..., n) \end{aligned} \tag{5}$$

このモデルを用いて数理計画問題を解くことで，できるだけ全体の満足度を高めつつ，学生をクラスに割り当てることができる．

2.2 問題点

この研究においては割当先が一つである場合に限られているため，一人に対して複数の割当先が存在することになると，以下のような問題が生じる．

三つの企業 A，B，C が存在し，A は人気企業，C は不人気企業であるとする．各企業の定員は 1 人とする．また，3 人の学生 S_0，S_1，S_2 がおり，それぞれが表 1 のように配点を行っているとする．この場合，A には確率 $\frac{1}{2}$ で S_0，確率 $\frac{1}{2}$ で S_1 が割り当てられ，B には S_1，C には S_2 が割り当てられることになる．

表 1: 学生の選好

	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
S_0	A:100	B:50	C:0
S_1	A:100	B:70	C:0
S_2	C:100	A:70	B:20

しかし，ここでもし S_2 が「C は不人気だから少しくらい低い点数にしても希望が通るだろう」と考え，表 2 のように虚偽申告したとする．すると，A には確

表 2: 学生の選好（S_2 は虚偽申告）

	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
S_0	A:100	B:50	C:0
S_1	A:100	B:70	C:0
S_2	A:100	C:70	B:20

率 $\frac{1}{3}$ で S_0，確率 $\frac{1}{3}$ で S_1，確率 $\frac{1}{3}$ で S_2 が割り当てられ，B には S_1，C には S_2 が割り当てられることになる．この時，割り当て先の期待値を考えると，虚偽申告によって A に割り当てられる可能性を増やした S_2 が得をし，その分 S_0 と S_1 が損をしてしまっていることになる．

このように，一人に対して複数の割当先が存在するとすると，既存研究では虚偽申告に対応できない．

第 3 章　割当メカニズム

3.1　問題設定と割当の方針

既存の研究では対処できなかった問題に対応するため，虚偽申告を抑制できるような新たな割当メカニズムを考える．

しかし，学生の数や嗜好，企業の人気の偏りや定員数などを全て考慮していくと情報量が膨大になり，割当メカニズムの開発には膨大な時間を要する．そこで本研究では以下のような限定された状態について考え，特定の虚偽申告を防ぐことを目的とする．

- 問題設定

人気企業は1社のみと仮定し，それ以外の選好は一様に分布する．人気企業を志望する学生の割合は α とする．学生の総数を n 人とすると，人気企業を志望する学生は αn 人，それ以外の学生は $(1-\alpha)n$ 人いることになる．また，説明会に参加する企業数は m 社，1日に行う説明回数は k 回とし，各回の見学可能人数は1人とする．学生は同じ企業は1度しか見学できない．また，$\lfloor \frac{mk}{n} \rfloor = \frac{mk}{n}$ の場合に限定する．

- 割当の方針

  割当は，基本的に以下の二つのルールに従って行う．

  ルール1

  全体の効用が最大化されるように割り当てる

  ルール2

  ルール1の下で複数の割当先候補がある場合は，個人間の公平性を重視する

表3: 志望分布

	第1希望	第2希望	第3希望	第4希望	第5希望
学生1	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
学生2	c_1	c_5	c_2	c_4	c_3
学生3	c_2	c_4	c_5	c_3	c_1
学生4	c_3	c_5	c_1	c_2	c_4
学生5	c_4	c_1	c_3	c_5	c_2

例えば，学生が5人が五つの企業 c_1，c_2，c_3，c_4，c_5 に対して表3のような選好をそれぞれ持つとして，$k=2$ の場合について割当を考えてみる．各学生は割り当てられた企業の志望度に応じて効用を得られるものとする．簡単のため，ここでは第1希望に割り当てられたら5点，第2希望に割り当てられたら4点，...，第5希望に割り当てられたら1点とする．各学生の獲得効用の総和を学生全体の効用 (=社会的効用) とする．$k=2$ であるため，各企業はそれぞれ最大2名の学生を受け入れられることになる．つまり，学生を割り当てることのできる枠が全部で10個あることになる．ルール1に従うならば，この10個の枠に対して5人全員が志望度が高い順に二

つ，すなわち各々の第 1 希望と第 2 希望に割り当てることができれば最善と言える．
まず各学生の第 1 希望について割り当てて行くと，学生 1 と学生 2 は c_1，学生 3 は c_2，学生 4 は c_3，学生 5 は c_5 を見学できることになる．この時点で c_1 はもう満員となってしまう．次に第 2 希望について見て行くと，学生 1, 学生 2，学生 3，学生 4 はそれぞれ各第 2 希望に割り当てることができるが，学生 5 については第 2 希望である c_1 が既に満員であるため，割り当てることができない．(全体の効用の最大化を考えるならば，c_1 を第 2 希望としている学生 5 よりも，第 1 希望としている学生 1 と学生 2 を割り当てた方が効用が高いからである．) 学生 5 が第 2 希望に割り当てられなかった (本研究ではこれを「割当がスキップされた」と呼ぶ) ことで，学生を割り当てることのできる枠が 1 つ余ることになる．この枠に対して，次は各学生の第 3 希望について見て行く．余っている枠は c_3 である．各学生の第 3 希望についで見てみると，学生 3 と学生 5 が c_3 を第 3 希望としている．
この場合，学生 3 と学生 5 のどちらを c_3 に割り当てても全体の効用としては+3 なので変わらない．しかし，もし学生 3 を c_3 に割り当てたとすると，学生 3 は三つの企業を見学できるのに，学生 5 は第 1 希望とはいえ 1 つの企業しか見学できないことになる．このような不公平をなくすため，ルール 2 がある．個人間の公平性を重視し，学生 5 を c_3 に割り当てる．これで 10 個の枠全てに学生を割り当てた事になる．表 4 は割当結果であり，各学生は太字の企業を見学できる．

表 4: 割当結果

	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望	第 5 希望
学生 1	$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{c_2}$	c_3	c_4	c_5
学生 2	$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{c_5}$	c_2	c_4	c_3
学生 3	$\mathbf{c_2}$	$\mathbf{c_4}$	c_5	c_3	c_1
学生 4	$\mathbf{c_3}$	$\mathbf{c_5}$	c_1	c_2	c_4
学生 5	$\mathbf{c_4}$	c_1	$\mathbf{c_3}$	c_5	c_2

3.2 虚偽申告の防止

まず，人気企業を第 1 希望とする人の割合 α と，企業数の関係について考えてみる．

- $\alpha = \frac{1}{m}$ の場合
  この場合は，全ての企業に人気が均等に分散していることになる．つまり，企業 c_1 を第 1 志望とする人は $\frac{n}{m}$ 人，第 2 志望とする人も $\frac{n}{m}$ 人，...，企業 c_2 を第 1 志望とする人は $\frac{n}{m}$ 人，第 2 志望とする人も $\frac{n}{m}$ 人，...，というようになっている．このような一様な分布の時，選好が一様分布であると仮定しているため，学生達は自分の嗜好をそのまま申告すれば希望が高い順に企業の説明を聞くことができることになる．
- $\alpha > \frac{1}{m}$ の場合
  人気企業を c_1 とする．この時，志望の分布は，人気企業 c_1 を第 1 志望とする人が αn 人，第 2 希望とする人が $\frac{(1-\alpha)n}{m-1}$ 人，...，企業 c_2 を第 1 志望とする人が $\frac{(1-\alpha)n}{m-1}$ 人，第 2 希望とする人が $\frac{n}{m-1}(1 - \frac{1-\alpha}{m-1})$ 人，...，というようになっており，人気に偏りが生じている．このような状況においては c_1 をどう志望するかによって各学生が得られる効用が変わってくる．
  ルール 1 により全体の効用が高くなるように学生を企業に割り当てるため，c_1 には c_1 を第 1 希望としている学生から順に割り当てられていくが，c_1 には定員があるため全ての学生が c_1 を見学できるわけはなく，c_1 を第 2 希望以下とする人は一部を除いてほぼ確実に割当がスキップされる．(もちろん定員が少なければ c_1 を第 1 希望としていてもスキップされる可能性がある.)
  ルール 2 により，割当がスキップされた人はその分違う企業を見学することができるが，割当の方針上，これは c_1 よりも志望度が低い企業になってしまうため，どうしても c_1 を見学できる時と比べると満足度が低くなってしまう．このような時，c_1 見学しようと，虚偽申告を行う学生が発生する可能性がある．
  - √ **虚偽申告の発生**
    再び表 3 のような志望分布について考える．学生達が表 3 通りに志望を正直に申告したとすると，割当結果は表 4 のようになるわけであるが，もし学生 5 が第 1 希望を c_1，第 2 希望を c_4 として申告したとすると，ルール 1 に従って単純に希望が高い順に学生を割り当てて行くの

なら，学生5は確率2/3でc_1に割り当てられる事になる．もし学生5がc_1に割り当てられたならば，割当結果は表5のようになる．この時，

表5: 学生5が虚偽申告した場合の割当結果

	第1希望	第2希望	第3希望	第4希望	第5希望
学生1	c_1	$\mathbf{c_2}$	$\mathbf{c_3}$	c_4	c_5
学生2	$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{c_5}$	c_2	c_4	c_3
学生3	$\mathbf{c_2}$	$\mathbf{c_4}$	c_5	c_3	c_1
学生4	$\mathbf{c_3}$	$\mathbf{c_5}$	c_1	c_2	c_4
学生5	$\mathbf{c_1}$	$\mathbf{c_4}$	c_3	c_5	c_2

学生5は自分の志望を真実申告した場合と比べると第3希望の代わりに第2希望を見学できていることになる．つまり自分の志望を虚偽申告した事によって得をしているわけである．しかしながら，学生1は第1希望を見学出来なくなり，代わりに第3希望の企業を見学する事になる．学生5の虚偽申告によって学生1は損をしていることになる．学生全体としてみても，第2希望への割当が一つ増えて第1希望への割当が一つ減少している分，効用が下がっている．

そこで，虚偽申告を防ぐために割り当てについてルールを追加する．

ルール3

人気企業を第1希望とする学生のうち，人気企業を見学できた学生は第2希望以降の割当をある確率でスキップされる

このスキップにより生じた余剰枠にはc_1以外を第1希望とする学生を割り当てる．このルールによりc_1を第1希望とする学生はc_1以外を第1希望とする学生よりも負荷を負う形となる．c_1以外を第1希望とする人がc_1を第1希望と申告する事で自分の満足度を高めようとする行為を抑制するためである．例えば，第1希望に割り当てられたら5点，第2希望に割り当てられたら4点，第3希望に割り当てられたら3点の効用が得られるというような場合，表4のような割当結果なら学生5の獲得効用は4+3=7点であり，虚偽申告を行った場合である表5のような割当結果なら真の第2希望と第1希望を見学できるので獲得効用は4+5=9点となる．しかし，ルール3によってc_1を第1希望とする学生の第2

希望以降の割当が仮にそれぞれ確率 1/2 でスキップされるとすると，学生 5 は表 5 における c_4 への割当が確率 1/2 でスキップされることになる．すると，学生 5 が虚偽申告を行った場合の期待効用は $4+\frac{1}{2}\times 5=6.5$ となる．これは表 4 のような割当結果の場合よりも獲得効用が低くなっている．つまり，ルール 3 によって学生 5 は人気企業 c_1 が第 1 希望だという虚偽申告をすると損をする状況になったわけである．このようにして，c_1 を第 1 希望と虚偽申告するような誘因を排除する．それと同時に，c_1 を第 1 希望とする者についても，スキップを免れるために c_1 以外を第 1 希望と虚偽申告するというような行為を行わないような状況にしなくてはならない．

ここからは，人気企業 c_1 を第 1 希望とする学生の事を“ c_1 第 1 希望者 ”，c_1 以外の企業を第 1 希望とする学生の事を“ c_1 以外第 1 希望者 ”と呼ぶ事とする．c_1 第 1 希望者の期待効用 E_{c1}，c_1 以外第 1 希望者の期待効用 E_{ci} の定式化を行い，それらを用いて虚偽申告を防止するための割当スキップ確率についてそのとりうる値域を求める．

3.3 提案手法の定式化

c_1 第 1 希望者について，第 2 希望企業への割当がスキップされる確率を p_2，第 3 希望企業での割当がスキップされる確率を p_3，. . .，第 $\frac{mk}{n}$ 希望企業への割当がスキップされる確率を $p_{\frac{mk}{n}}$ とする．ここで，微小量 ε を用いて $p_3 = p_2 + \varepsilon$，$p_4 = p_3 + \varepsilon$，...，$p_{\frac{mk}{n}} = p_{\frac{mk}{n}-1} + \varepsilon$ と表せるとすると，スキップされる確率は $p_2 < p_3 < \cdots < p_{\frac{mk}{n}}$ となり，志望度を高く申告した企業から低く申告した企業にむけて順に割り当てがスキップされやすくなっていくことになる．つまり，第 2 希望以下の希望順序を並び替えることは学生にとって損となる．そこでさらに，ε は微小量であることから $p_2 = p_3 = \cdots = p_{\frac{mk}{n}} = P$ と近似して，第 1 希望についての虚偽申告を防げるような P の取りうる値について考える．

割当のルールを確認しておくと

ルール 1　全体の効用が最大化されるように割り当てる

ルール 2　ルール 1 の下で複数の割当先候補がある場合は，個人間の公平性を重視する

ルール 3　c_1 第 1 希望者は第 2 希望以降の割当を確率 P でスキップされる

という 3 つである．

企業が m 社である時，学生の第 1 希望に対する価値を v_1，第 2 希望に対する

価値を v_2，...，第 m 希望に対する価値を v_m とおく．($v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_m$）この時，第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できた時の効用は $\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j$ というように表すことができる．

$\alpha n < k$，$\alpha n > k$，$\alpha n = k$ それぞれの場合において，P を求める

3.3.1　$\alpha n < k$ の場合

$\lfloor \frac{mk}{n} \rfloor = \frac{mk}{n}$ であると仮定しているため，全ての学生は同じ数の企業を見学できる．つまり，もし全員が希望が高い順に企業を見学できるなら，全員が各々の第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の企業を見学できることになる．しかし，企業には定員があるため，全ての学生が希望通り見学できるわけではない．人気企業 c_1 は，第何志望と申告するかで見学できるか否かが決まってくる（c_1 以外の企業は人気が一様なため，希望通り見学できる）．$\alpha n < k$ の場合，c_1 の定員が c_1 第 1 希望者の人数よりも多いため，c_1 以外第 1 希望者のうち $(k - \alpha n)$ 人は c_1 を見学できる．そこで，以下のように q, r を定義する．

$$q = \lfloor \frac{k - \alpha n}{(1-\alpha)n/(m-1)} \rfloor \tag{6}$$

$$r = (k - \alpha n) - q\frac{(1-\alpha)n}{m-1} \tag{7}$$

$q = 1$ なら c_1 第 2 希望者が c_1 を見学でき，c_1 第 3 希望者のうち r 人は c_1 を見学できる．$q = 2$ なら c_1 第 2 希望者，第 3 希望者が見学でき，c_1 第 4 希望者のうち r 人は c_1 を見学できる．つまり，c_1 を見学できるかできないかの境目は c_1 を第 $q+2$ 希望としている学生である．各学生の期待効用については以下の 4 パターンが考えられる．

1. c_1 **第 1 希望者**

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}\text{希望を見学できる効用})$$

2. 第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ **希望に** c_1 **を含まない者**

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}\text{希望を見学できる効用})$$

3. 第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ **希望に** c_1 **を含み，かつ** c_1 **を見学できる者**

$$\begin{aligned}(\text{期待効用}) = (&\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}+1\text{希望を見学できる効用}) \\ &+(c_1\text{を見学できる効用}) \\ &-(\text{第}\frac{mk}{n}+1\text{希望を見学できる効用})\end{aligned}$$

4. 第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含み，かつ c_1 を見学できない者

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}+1\text{希望を見学できる効用})$$
$$-(c_1\text{を見学できない効用})$$

上記の 4 パターンにおいて，1 に該当するのは αn 人，
2 は $\{(1-\alpha)n - \frac{(1-\alpha)n}{m-1}(\frac{mk}{n}-1)\}$ 人，3 は $(k-\alpha n)$ 人，
4 は $\{\frac{(1-\alpha)n}{m-1}(\frac{mk}{n}-1)-(k-\alpha n)\}$ 人である．これに前述の c_1 第 1 希望者に対する負荷を加えると，E_{c1} と E_{ci} は以下のように定式化できる．

$$E_{c1} = \sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
E_{ci} = \quad & \frac{m-\frac{mk}{n}}{m-1}\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j \\
+ \quad & \frac{1}{m-1}\{(\frac{mk}{n}-1)\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - \sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j\} \\
+ \quad & \frac{q}{m-1}(\sum_{j=2}^{q+1} v_j - v_{\frac{mk}{n}+1}) \\
+ \quad & \frac{r}{(1-\alpha)n}(v_{q+2} - v_{\frac{mk}{n}+1}) \\
+ \quad & P\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{mk}{n}-1)v_{\frac{mk}{n}+1}
\end{aligned} \tag{9}$$

E_{c1} において，第 1 項は第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の企業を見学できる場合の効用を表し，第 2 項は確率 P によってスキップされる割当によって生じる $c1$ 第 1 希望者の期待効用のマイナス分を表す.

E_{ci} において，第 1 項は { (c_1 以外第 1 希望者のうち第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含まない者の数) $\times$ (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の企業を見学できる場合の効用)$\div(1-\alpha)n\}$ を表し，第 2 項は { (c_1 以外第 1 希望者のうち第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含む者の数) $\times$ (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望の企業を見学できる場合の効用 - c_1 を見学出来ないことによる効用のマイナス分)$\div(1-\alpha)n$ } を表す．また，第 4 項，第 5 項は { (c_1 以外第 1 希望者のうち $k-\alpha n$ 人が c_1 を見学できることによる期待効用のプラス分)$\div(1-\alpha)n\}$ を表し，第 6 項は { (c_1 第 1 希望者における割当スキップによって生じた余剰枠を用いて c_1 以外第 1 希望者

の第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望に割り当てることで得られる期待効用のプラス分)$\div(1-\alpha)n$ }を表す．各項で $\div(1-\alpha)n$ を行っているのは，c_1 以外第 1 希望者全体としての期待効用を求めるためである．

ここでは c_1 を見学出来ない者のうち一番 c_1 を見学出来ないことによる“被害”が大きい c_1 第 $q+2$ 希望者の虚偽申告について考える．また，c_1 第 1 希望者がルール 3 から逃れるために c_1 を第 1 希望以外として虚偽申告をするとすると，一番 c_1 を見学できる可能性が高い第 2 希望として申告するはずと考える．

式を見やすくするため，下記のように c_1 第 2 希望者の人数 $\frac{(1-\alpha)n}{m-1}$ を z とする．

$$z=\frac{(1-\alpha)n}{m-1} \tag{10}$$

ここで，話を簡単にするため，$k-\alpha n<z$ と仮定する．つまり，c_1 第 1 希望者全員に c_1 を割り当てた後の c_1 の余りの枠の数は，c_1 第 2 希望者の数より少ない $(q=0)$ という仮定である．この時，c_1 第 1 希望者は皆 c_1 を見学できるが，c_1 第 2 希望者は一部の人だけ c_1 を見学できることになる．この場合，$\frac{mk}{n}\geq 3$ の時は c_1 第 3 希望者の行動についても考えなくてはならない．確実に c_1 を見学できる c_1 第 1 希望者のみが割当スキップにより負荷を負う状態では，c_1 第 3 希望者が，ある確率で c_1 を見学できかつ割当スキップのない c_1 第 2 希望者だと虚偽申告する可能性がある．そこで，c_1 第 2 希望者に対しても c_1 第 1 希望者と同様に「c_1 を見学できた場合は第 3 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の割当がそれぞれある確率でスキップされる」という負荷を与え，c_1 第 3 希望者が c_1 第 2 希望者だと虚偽申告しないように，かつ c_1 第 2 希望者が c_1 第 3 希望者だと虚偽申告しないようなスキップ確率の範囲を求める．c_1 第 1 希望者に対するスキップ確率を P_1，c_1 第 2 希望者に対するスキップ確率を P_2 とすると，これらを求めるための条件は以下の四つになる．

条件 1

$$\begin{aligned} & (c_1\text{第 3 希望者が真実申告した場合の効用}) \\ \geq\ & (c_1\text{第 3 希望者が } c_1\text{を第 2 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\ =\ & (c_1\text{第 2 希望者が } z+1 \text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 3 希望者の効用}) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - v_3$$

$$\geq \frac{k-\alpha n}{z+1}(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P_2(\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_3)) + (1-\frac{k-\alpha n}{z+1})(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - v_3) \qquad (11)$$

左辺は (第 3 希望を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望を見学できる効用) を表す.

右辺は (c_1 を見学できる確率) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分)+(c_1 を見学できない確率) × (第 3 希望を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す．c_1 第 2 希望者に対するスキップによるマイナス分は第 3 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望までなので $P_2 * \sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j$ だが，ここでは c_1 第 3 希望者が虚偽申告によって見掛け上 c_1 第 2 希望者となっているので，実際にスキップされるのは真の第 2 希望と第 4 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の割り当てという事になる．そのため，$P_2 * \sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_3$ と表現されている.

条件 2

$$\begin{aligned} & (c_1\text{第 2 希望者が真実申告した場合の効用}) \\ \geq\ & (c_1\text{第 2 希望者が } c_1\text{を第 3 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\ =\ & (c_1\text{第 3 希望者が } z+1 \text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 2 希望者の効用}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k-\alpha n}{z}(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P_2\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j) + (1-\frac{k-\alpha n}{z})(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - v_2) \\ \geq \sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - v_2 \qquad (12) \end{aligned}$$

左辺は (c_1 を見学できる確率) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分)+(c_1 を見学できない確率) × (第 2 希望を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す.

右辺は (第 2 希望を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す.

条件 3

$$\begin{aligned} & (c_1\text{第 2 希望者が真実申告した場合の効用}) \\ \geq\ & (c_1\text{第 2 希望者が } c_1\text{を第 1 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\ =\ & (c_1\text{第 1 希望者が} \alpha n+1 \text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 2 希望者の効用}) \end{aligned}$$

$$\frac{k-\alpha n}{z}(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P_2\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j) + (1-\frac{k-\alpha n}{z})(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - v_2)$$
$$\geq \sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P_1(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_2) \tag{13}$$

左辺は (c_1 を見学できる確率) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分)+(c_1 を見学できない確率) × (第 2 希望を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す.

右辺は (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分) を表している．条件 1 と同様に，ここで虚偽申告している c_1 第 2 希望者がスキップされるのは真の第 1 希望と第 3 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の割当となるので，$P_1 * (\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_2)$ という表現となる.

条件 4

$$\begin{aligned} & (c_1\text{第 1 希望者が真実申告した場合の効用}) \\ \geq\ & (c_1\text{第 1 希望者が } c_1\text{を第 2 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\ =\ & (c_1\text{第 2 希望者が } z+1 \text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 1 希望者の効用}) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P_1\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j$$
$$\geq \frac{k-\alpha n}{z+1}(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P_2\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j) + (1-\frac{k-\alpha n}{z+1})\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}+1} v_j \tag{14}$$

左辺は (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分) を表す.

右辺は右辺は (c_1 を見学できる確率) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分)+(c_1 を見学できない確率) × (第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す.

条件に基いて P の値域を求めると以下のようになる.

$$\frac{1}{\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_3}(v_3 - v_{\frac{mk}{n}+1}) \leq P_2$$
$$\leq \frac{1}{\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j}(v_2 - v_{\frac{mk}{n}+1}) \tag{15}$$

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_2}\{(1 - \frac{k-\alpha n}{z})(v_2 - v_{\frac{mk}{n}+1}) + P_2 \frac{k-\alpha n}{z}\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j\} \leq P_1$$

$$\leq \frac{1}{\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j}\{(1 - \frac{k-\alpha n}{z+1})(v_1 - v_{\frac{mk}{n}+1})P_2 \frac{k-\alpha n}{z+1}\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j\} \quad (16)$$

P_1，P_2 は確率であるため 0 以上 1 以下となる．そのため，下記のように左辺と右辺に制約を加える．

$$max\{\frac{1}{\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_3}(v_3 - v_{\frac{mk}{n}+1}), 0\} \leq P_2$$

$$\leq min\{\frac{1}{\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j}(v_2 - v_{\frac{mk}{n}+1}), 1\} \quad (17)$$

$$max\{\frac{1}{\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_2}\{(1 - \frac{k-\alpha n}{z})(v_2 - v_{\frac{mk}{n}+1}) + P_2 \frac{k-\alpha n}{z}\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j\}, 0\} \leq P_1$$

$$\leq min\{\frac{1}{\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j}\{(1 - \frac{k-\alpha n}{z+1})(v_1 - v_{\frac{mk}{n}+1})P_2 \frac{k-\alpha n}{z+1}\sum_{j=3}^{\frac{mk}{n}} v_j\}, 1\} \quad (18)$$

これがスキップ確率の値域となる．

3.3.2　$\alpha n > k$ の場合

c_1 の定員が c_1 第 1 希望者の人数よりも少ないため，c_1 第 1 希望者のうち $(\alpha n - k)$ 人は c_1 を見学できない．つまり，c_1 第 1 希望者は確率 $\frac{k}{\alpha n}$ で第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できるが，確率 $1 - \frac{k}{\alpha n}$ で c_1 への割当をスキップされる（この時は第 2 希望から第 $\frac{mk}{n} + 1$ 希望まで見学できることになる）．その際，第 1 希望 c_1 を見学できなかった者については，第 2 希望以降の割当スキップを行わない．また，c_1 は c_1 第 1 希望者で埋まってしまうため，第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含む学生は皆 c_1 を見学することができない．したがって，各学生の期待効用については以下の 4 パターンが考えられる．

1. c_1 第 1 希望者のうち，c_1 を見学できる者

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}\text{希望を見学できる効用})$$

2. c_1 第 1 希望者のうち，c_1 を見学できない者

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 2 希望から第}\frac{mk}{n} + 1\text{希望を見学できる効用})$$

3. 第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含まない者

$$(\text{期待効用}) = (\text{第1希望から第}\frac{mk}{n}\text{希望を見学できる効用})$$

4. 第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含む者

$$\begin{aligned}(\text{期待効用}) = (&\text{第1希望から第}\frac{mk}{n}+1\text{希望を見学できる効用})\\ &-(c_1\text{を見学できない効用})\end{aligned}$$

上記の 4 パターンにおいて，1 に該当するのは k 人，2 は $(\alpha n - k)$ 人，3 は $\{(1-\alpha)n - \frac{(1-\alpha)n}{m-1}(\frac{mk}{n}-1)\}$ 人，4 は $\{\frac{(1-\alpha)n}{m-1}(\frac{mk}{n}-1)\}$ 人である．これに前述の c_1 第 1 希望者に対する負荷を加えると，E_{c1}，E_{ci} は以下のようになる．

$$E_{c1} = \frac{k}{\alpha n}(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j) + (1-\frac{k}{\alpha n})\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}+1} v_j \tag{19}$$

$$\begin{aligned}E_{ci} = \frac{m-\frac{mk}{n}}{m-1}\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j \quad &+ \quad \frac{1}{m-1}\{(\frac{mk}{n}-1)\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - \sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j\}\\ &+ \quad P\frac{k}{(1-\alpha)n}(\frac{mk}{n}-1)v_{\frac{mk}{n}+1}\end{aligned} \tag{20}$$

E_{c1} において，第 1 項は (c_1 を見学できる確率) $\times$ (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望を見学できる確率 - P によるマイナス分) を表し，第 2 項は (c_1 を見学できない確率) $\times$ (第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望を見学できる確率) を表す.

E_{ci} において，第 1 項は{ (c_1 以外第 1 希望者のうち第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含まない者の数) $\times$ (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の企業を見学できる場合の効用)$\div(1-\alpha)n\}$ を表し，第 2 項は{ (c_1 以外第 1 希望者のうち第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含む者の数) $\times$ (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望の企業を見学できる場合の効用 - c_1 を見学できないことによる効用のマイナス分)$\div(1-\alpha)n$ } を表す．第 6 項は{ (c_1 第 1 希望者における割当スキップによって生じた余剰枠を用いて c_1 以外第 1 希望者の第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望に割り当てることで得られる期待効用のプラス分)$\div(1-\alpha)n$ } を表す.

ここでは c_1 を見学出来ない者のうち一番 c_1 を見学出来ないことによる " 被害 " が大きい c_1 第 2 希望者が虚偽申告する場合について考える．また，c_1 第 1 希望者がもしルール 3 から逃れるために c_1 を第 1 希望以外として虚偽申告する

とするなら，第 1 希望以外では割当られる可能性はないので，これについてはどう虚偽申告しても同じである．ここでは，第 2 希望として虚偽申告するものとして考える．

$\alpha n < k$ の時と同様に考えると，P を求めるための条件は以下の二つになる．

条件 1

$$\begin{aligned} & (c_1\text{第 2 希望者が真実申告した場合の効用}) \\ \geq \ & (c_1\text{第 2 希望者が } c_1\text{を第 1 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\ = \ & (c_1\text{第 1 希望者が}\alpha n+1\text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 2 希望者の効用}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - v_2 \ \geq \ & \frac{k}{\alpha n+1}(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_2)) \\ & +(1-\frac{k}{\alpha n+1})(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - v_2) \end{aligned} \tag{21}$$

左辺は (第 2 希望を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望を見学できる効用) を表す.

右辺は (c_1 を見学できる確率) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分)+(c_1 を見学できない確率) × (第 2 希望を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す.

条件 2

$$\begin{aligned} & (c_1\text{第 1 希望者が真実申告した場合の効用}) \\ \geq \ & (c_1\text{第 1 希望者が } c_1\text{を第 2 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\ = \ & (c_1\text{第 2 希望者が } z+1\text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 1 希望者の効用}) \end{aligned}$$

$$\frac{k}{\alpha n}(\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j) + (1-\frac{k}{\alpha n})\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}+1} v_j \geq \sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}+1} v_j \tag{22}$$

左辺は (c_1 を見学できる確率) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望まで見学できる効用 - スキップによるマイナス分)+(c_1 を見学できない確率) × (第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す.

右辺は (第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望まで見学できる効用) を表す.

条件に基いて P の値域を求めると以下のようになる．

$$max\{\frac{1}{\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_2}(v_2 - v_{\frac{mk}{n}+1}), 0\} \leq P$$
$$\leq min\{\frac{1}{\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j}(v_1 - v_{\frac{mk}{n}+1}), 1\} \tag{23}$$

3.3.3 $\alpha n = k$ の場合

$\alpha n = k$ であるため，c_1 第 1 希望者は皆 c_1 を見学できるが，それ以外の学生は c_1 を見学できない．これにより，c_1 以外第 1 希望者については，第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含む人は c_1 の部分を除いて第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望の企業を見学でき，第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含まない人は，ここでは c_1 を見学できない影響を受けないため，第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の企業を見学できることになる．したがって，各学生の期待効用については以下の 3 パターンが考えられる．

1. c_1 第 1 希望者

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}\text{希望を見学できる効用})$$

2. 第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含まない者

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}\text{希望を見学できる効用})$$

3. 第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含む者

$$(\text{期待効用}) = (\text{第 1 希望から第}\frac{mk}{n}+1\text{ 希望を見学できる効用})$$
$$-(c_1\text{を見学できない効用})$$

上記の 3 パターンにおいて，1 に該当するのは αn 人，
2 は $\{(1-\alpha)n - \frac{(1-\alpha)n}{m-1}(\frac{mk}{n}-1)\}$ 人，3 は $\{\frac{(1-\alpha)n}{m-1}(\frac{mk}{n}-1)\}$ 人である．これに前述の c_1 第 1 希望者に対する負荷を加えると，E_{c1}，E_{ci} は以下のようになる．

$$E_{c1} = \sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - P\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j \tag{24}$$

$$E_{ci} = \frac{m-\frac{mk}{n}}{m-1}\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{m-1}\{(\frac{mk}{n}-1)\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}+1} v_j - \sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j\} \\
&+ \quad P\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{mk}{n}-1)v_{\frac{mk}{n}+1} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

E_{c1} において，第 1 項は第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の企業を見学できる場合の効用を表し，第 2 項は確率 P によってスキップされる割当によって生じる $c1$ 第 1 希望者の期待効用のマイナス分を表す.

E_{ci} において，第 1 項は { (c_1 以外第 1 希望者のうち第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含まない者の数) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望の企業を見学できる場合の効用)÷$(1-\alpha)n$} を表し，第 2 項は { (c_1 以外第 1 希望者のうち第 2 希望から第 $\frac{mk}{n}$ 希望に c_1 を含む者の数) × (第 1 希望から第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望の企業を見学できる場合の効用 - c_1 を見学出来ないことによる効用のマイナス分)÷$(1-\alpha)n$ } を表す．第 6 項は { (c_1 第 1 希望者における割当スキップによって生じた余剰枠を用いて c_1 以外第 1 希望者の第 $\frac{mk}{n}+1$ 希望に割り当てることで得られる期待効用のプラス分)÷$(1-\alpha)n$ } を表す.

ここでは c_1 を見学出来ない者のうち一番 c_1 を見学出来ないことによる " 被害 " が大きい c_1 第 2 希望者が虚偽申告した場合について考える．また，c_1 第 1 希望者がもしルール 3 から逃れるために c_1 を第 1 希望以外として虚偽申告するとするなら，一番 c_1 を見学できる可能性が高い第 2 希望として申告するはずと考える．P を求めるための条件は以下の二つになる.

条件 1

$$
\begin{aligned}
&(c_1\text{第 2 希望者が真実申告した場合の効用}) \\
\geq\ &(c_1\text{第 2 希望者が } c_1\text{を第 1 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\
=\ &(c_1\text{第 1 希望者が } k+1 \text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 2 希望者の効用})
\end{aligned}
$$

$\alpha n > k$ の場合の条件 1 の αn に k を代入したものと同じになる.

条件 2

$$
\begin{aligned}
&(c_1\text{第 1 希望者が真実申告した場合の効用}) \\
\geq\ &(c_1\text{第 1 希望者が } c_1\text{を第 2 希望だと虚偽申告した場合の効用}) \\
=\ &(c_1\text{第 2 希望者が } z+1 \text{ 人いる場合の元 } c_1\text{第 1 希望者の効用})
\end{aligned}
$$

$\alpha n < k$ の場合の条件 4 の αn に k を代入し，P_2 を含む項を考えないものと同じになる.

条件に基いて P の値域を求めると以下のようになる.

$$\begin{aligned} max\{\frac{1}{\sum_{j=1}^{\frac{mk}{n}} v_j - v_2}(v_2 - v_{\frac{mk}{n}+1}), 0\} \leq P \\ \leq min\{\frac{1}{\sum_{j=2}^{\frac{mk}{n}} v_j}(v_1 - v_{\frac{mk}{n}+1}), 1\} \end{aligned} \tag{26}$$

第 4 章　評価

今回のような割当問題における最善の結果とは,「全員が自分の選好を真実申告」した場合に基いて割当を行うことで得られる．しかし，虚偽申告することで得をすることができる者がいる限りそれが実現できる可能性はほぼない．そのため，全員に真実申告をさせるために今回の手法を適用するわけだが，それにより得られる社会的効用が虚偽申告が発生した場合の社会的効用より低いようでは意味がない．それらの社会的効用を比較する事で，本研究における手法の評価とする.

4.1　評価方法

以下の二つの場合の社会的効用を比べる

1. 提案手法を適用した場合に，全員が真実申告した場合
2. 提案手法を適用しない場合に，虚偽申告で得をしうる者が全員虚偽申告をした場合

2 と比べて 1 の社会的効用の方が大きい場合，学生個人としても全体としても虚偽申告が得にならない状況が作り出せている事になり，提案手法の有効性を示す事が出来る.

{(1 の値)-(2 の値)} ÷ (2 の値) × 100 を，ここでは“社会的効用の改善率”と呼ぶこととする．社会的効用の計算には，できるだけ効用のマイナス分を小さくするために P の下限を用いる．$\alpha n < k$ の場合については，P_2 の下限を用いて導出した P_1 の下限を用いる．また，P の値域の変化の様子も確認する.

4.2 評価結果

図 3，図 4，図 5 において，縦軸は提案手法の適用による社会的効用の改善率を表し，横軸は第 1 希望の価値 v_1 の値を表す．人気企業を第 1 希望とする学生の割合 α と価値 v_1 を変化させることで社会的効用の改善率がどのように変化するかの一例である．図 4 は α の値の変化に応じて $\alpha n < k \rightarrow \alpha n = k \rightarrow \alpha n > k$ というように人気企業を第 1 希望とする学生の数とその定員の関係が変化する際に社会的効用の改善率がどう変化するかの例であり，図 5 は学生数を多くした場合に社会的効用の改善率の変化がどのようになるかの例である．また，表 6 には $\frac{mk}{n}$ と v_1 を変化させた時の P の値域の変化の一例を示す．

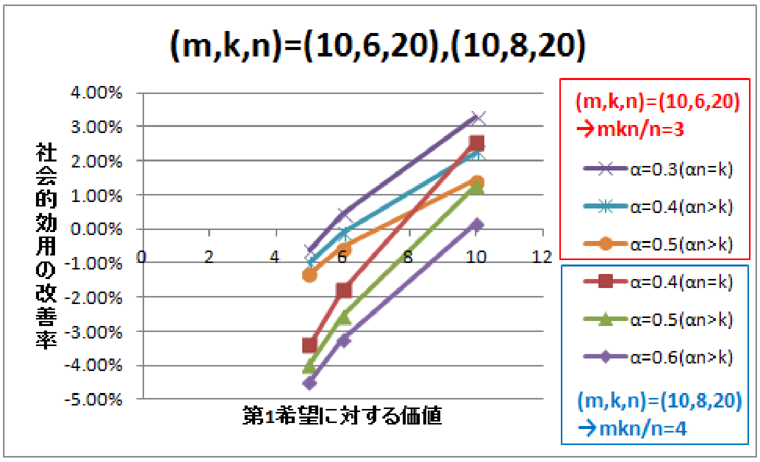

図 3: 変数の変化による提案手法の効能の変化例

表 6: 図 3 における P の値域の変化

	$v_1 = 5$ の時	$v_1 = 6$ の時	$v_1 = 10$ の時
$\frac{mk}{n} = 3$	$\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{3}{7}$	$\frac{2}{9} \leq P \leq \frac{4}{7}$	$\frac{2}{13} \leq P \leq 1$
$\frac{mk}{n} = 4$	$\frac{3}{10} \leq P \leq \frac{4}{9}$	$\frac{3}{11} \leq P \leq \frac{5}{9}$	$\frac{1}{5} \leq P \leq 1$

評価の結果，以下のような傾向が見られた．

1. α を大きくすると，提案手法による効能が低下する

   α が大きくなるという事は，c_1 第 1 希望者の数が増え，それ以外の企業を希望する人が減る事になる．提案手法におけるスキップ確率 P は c_1 第 2 希望者の虚偽申告を防ぐために c_1 第 1 希望者の獲得効用を減らすためのもの

であるが，α を大きくすると c_1 以外第 1 希望者 (虚偽申告によって得ができうる者) の数が減るため，虚偽申告による社会的効用の低下は小さくなる．これによってむしろ P を適用することによる社会的効用のマイナス分の方が大きくなってしまい，α を大きくすればするほど提案手法によって社会的効用が低下してしまうことになる．

2. $\frac{mk}{n}$ を大きくすると，提案手法による効能が低下する
$\frac{mk}{n}$ が増えるという事は，一人一人が見学できる企業数が増えるということである．すると，虚偽申告をして得をしうる者の数が増えることになる一方で，c_1 第 1 希望者がスキップされうる割当の数も多くなることになる．これにより P 適用時の社会的効用のマイナス分が大きくなり，虚偽申告より

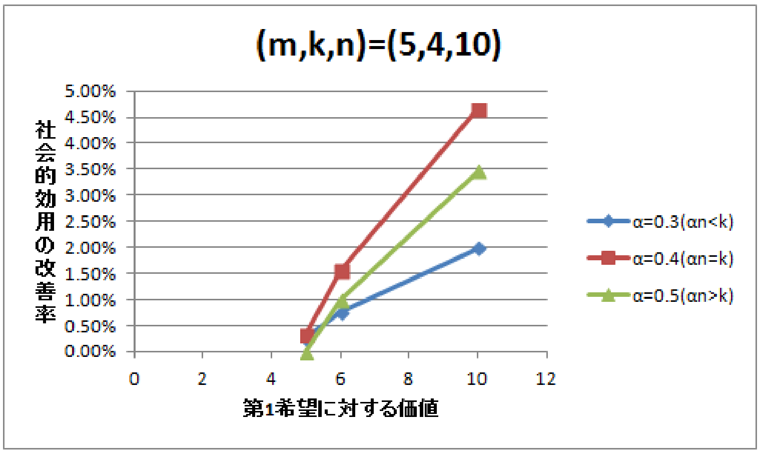

図 4: αn と k の関係の変化による提案手法の効能の変化例

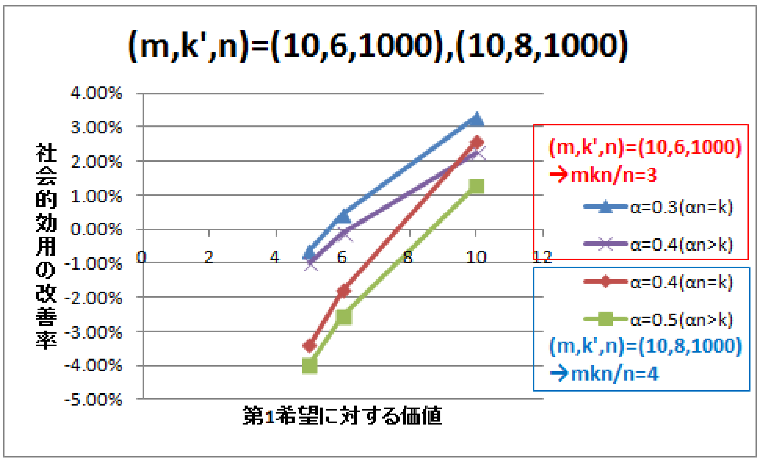

図 5: 学生の数を多くした場合の提案手法の効能の変化例

も提案手法の方が社会的効用を低下させてしまうことになる．

3. v_1 を大きくすると，提案手法による効能が上昇する
   c_1 に対する割当において，虚偽申告をしている見掛け上の c_1 第1希望者よりも真の c_1 第1希望者が割り当てられた方が社会的効用が高くなる．第1希望に対する価値 v_1 が大きくなればなるほどこの両者の獲得効用の差が大きくなることから，P を適用して虚偽申告を排除すれば，社会的効用が大きく改善されることになる．

$\alpha n \geq k$ の時，P の値域は $\frac{mk}{n}$ が大きくなるほど狭くなった．

$\alpha n < k$ の場合は，c_1 第2希望者は，虚偽申告なしでも c_1 の割当てを受けられる可能性が小さくない (つまり，潜在的虚偽申告者が c1 第3希望者になる）．これにより，虚偽申告が発生した際の社会的効用の低下は小さくなるため，相対的に提案方法による社会的効用の改善の程度は小さくなる．P の値域は c_1 第2希望者の数や，c_1 を c_1 第1希望者に割り当てた後の c_1 の余りの枠の数に影響を受ける．

また，図5のように学生の数を大きくしてもこれらの傾向は変わらない．図5では，見学時刻 $t = 1$ から $t = 50$ までをまとめて定員50とみなし，$k = 300$ を $k' = 6$，$k = 400$ を $k' = 8$ として記載している．本研究では「企業ブースの定員は1人，1日に k 回の説明が行われる」と設定しているが，本来の合同企業説明会においては企業ブースの定員は1人ではなく数十人程度であり，かつ1日に数百回もの説明が行われるというような事はありえない．そのため図5において $k = 300$ というように記載すると「現実的ではない」との指摘を受ける恐れがあるため，前述のように k' を用いて記載している．選好が一様であると仮定しているため,「見学時刻 $t = 1$ から $t = 50$ までをまとめて定員50とみなす」という操作を行ったとしても制約を満たす割当ては存在すると考えられる．

第5章　おわりに

本研究の貢献は以下の通りである．

- **有効となる虚偽申告パターンの解明**
  人気企業以外を第1希望とする学生は，人気企業を第1希望と虚偽申告することで期待効用を増加させ得ることを明らかにした．これは，人気企業ブースは希少な資源であり，効率的な割当てを考える際，第1希望者に優

先的に割り当てられるため，虚偽申告が有効となる．

- **虚偽申告を防止するメカニズムの提案**

  上記の虚偽申告を防ぐために，人気企業の割当てを受けた場合に，以降の割当てを確率的にスキップするメカニズムを提案した．スキップ確率を大きくすれば，人気企業以外を第1希望とする学生の虚偽申告を防げるが，逆に人気企業を第1希望とする学生の虚偽申告を引き起こす恐れがある．そこで，全学生にとって虚偽申告を防ぐスキップ確率の範囲を求めた．つぎに，評価実験を行い，虚偽申告が発生する場合より割当てがどれだけ改善できるかを確認した．

本研究では，複数ユニットの割当問題において虚偽申告を防止する手法の提案に際して，以下のような仮定を用いた

- 人気企業は1社
- 人気企業以外の人気は一様に分布
- 割当先の数は全員同じ
- $\alpha n < k$ において，c_1 第1希望者に c_1 を割り当てた後の余りの枠は c_1 第2希望者の数より小さい

今後の課題は，これらの仮定を一つでも少なくし，より一般的な場面に適用できるように手法を改善することである．

謝辞

本研究を行うにあたり，熱心なご指導，ご助言を賜りました松原繁夫准教授に厚くお礼申し上げます．また，日頃より，有益な御助言を与えてくださりました石田亨教授に心から感謝致します． そして最後に，日頃から様々な御助言，御協力を頂きました石田・松原研究室の皆様に心から感謝致します．

参考文献

[1] Budish, E. and Cantillon, E. : The Multi-unit Assignment Problem: Theory and Evidence from Course Allocation at Harvard, *American Economic Review*, Vol. 105, NO. 5, pp. 2237-2271 (2012).

[2] Abdulkadiroglu, A., Pathak, P.A. and Roth, A.E.: Strategy-Proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High

School Match, *American Economic Review*, Vol. 99, NO. 5, pp. 1954-1978 (2009).

[3] 今野浩: 数理決定法入門, 朝倉書店 (1992).

[4] 今野浩: 実践 数理決定法, 日科技連出版社 (1997).